

Matematică M_şt-nat

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.

Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

5p	1. Să se rezolve inecuația: $\frac{x^2-1}{x^2-3x+2} \leq 2$
5p	2. Să se calculeze partea imaginară a numărului complex: $z = \frac{3i-1}{2i+3}$
5p	3. Determinați $x \in N$, astfel încât : $1+ 5 + 9 + \dots + x = 561$
5p	4. Să se determine numărul funcțiilor: $f: \{1,2,3,4\} \rightarrow \{1,2,3,4\}$, cu proprietatea că $f(1)=3$
5p	5. Să se arate că unghiul dintre vectorii: $\vec{u} = \vec{i} - 7\vec{j}$ și $\vec{v} = \vec{i} + 7\vec{j}$ este obtuz.
5p	6. Dacă $A(1,3)$, $B(-1,4)$ și $C(2,-2)$. Determinați ecuația înălțimii din A.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

5p	1. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.
5p	a) Calculați $A*B$ și $B*A$.
5p	b) Calculați inversa matricei A.
5p	c) Rezolvați ecuația $X*A=B$.
5p	2. Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + x + y$
5p	a) Arătați că $x \circ y = (x + 1)(y + 1) - 1$, oricare ar fi x și y întregi.
5p	b) Determinați elementele simetrizabile în raport cu legea de compoziție.
5p	c) Calculați: $1 \circ 2 \circ 3 \dots \circ 2020$

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

5p	1. Se consideră funcția $f: R/\{-1\} \rightarrow R$, $f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$
5p	a) Să se determine asimptotele funcției f.
5p	b) Să se studieze monotonia funcției f.
5p	c) Să se arate că oricare ar fi $x > -1$, rezultă că $f(x) \geq 2$.
5p	2. Se consideră $f_n: [0,1] \rightarrow R$, $f_n(x) = \frac{x^n}{x+3}$ și $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$
5p	a) Calculați I_0 și I_1 .
5p	b) Calculați $\int_0^1 e^x (x + 3) f_2(x) dx$
5p	c) Să se arate că $I_{n+1} + 3 I_n = \frac{1}{n+1}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\frac{-x^2 + 6x - 5}{x^2 - 3x + 2} \leq 0$ $x \in (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup [5, \infty)$	2p 3p
2.	$z = \frac{-3 - 11i}{13}$ $\operatorname{Im} z = \frac{-11}{13}$	3p 2p
3.	$r=4, x=4n-3$ $\frac{(x+1)n}{2} = 561$ $n=65$	2p 1p 2p
4.	$f(1)=3, f(2) \in \{1,2,3,4\}, f(3) \in \{1,2,3,4\}, f(4) \in \{1,2,3,4\}$ $\text{Numărul funcțiilor: } 4^3$	3p 2p
5.	$\vec{u} * \vec{v} = -48, \vec{u} = \sqrt{50}, \vec{v} = \sqrt{50}$ $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{-48}{50} < 0$	3p 2p
6.	$m_{BC} = -2$ $\text{ecuația înălțimii din A este: } x-2y+5=0$	2p 3p

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1.a)	$A*B = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ 21 & 26 \end{pmatrix}$ $B*A = \begin{pmatrix} -1 & 22 \\ 15 & 20 \end{pmatrix}$	3p 2p
1.b)	$\det A = 2 \neq 0, \text{ rezultă } A \text{ este inversabilă}$ $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$	2p 3p
1.c)	Din b) rezultă că A e inversabilă, rezultă că $X = B*A^{-1}$ $X = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 22 & -16 \\ -15 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -8 \\ -15 & -5 \end{pmatrix}$	2p 3p
2.a)	$x \circ y = xy + x + y + 1 - 1 = x(y+1) + (y+1) - 1 =$ $= (y+1)(x+1) - 1 = (x+1)(y+1) - 1, \text{ oricare ar fi } x \text{ și } y$ întregi	2p 3p
2.b)	Elementu neutru este $e=0$ Elemente simetrizabile $x=0$ și $x=-2$	2p 3p
2.c)	$x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_n = (x_1 + 1)(x_2 + 1) \dots (x_n + 1) - 1$ $1 \circ 2 \circ 3 \dots \circ 2020 = 2 * 3 * 4 * \dots * 2021 - 1 = 2021! - 1$	3p 2p

SUBIECTUL III (30 de puncte)

1.a)	nu există asimptote orizontale Y=x-1 asimptotă oblică x=-1 asimptota verticală	1p 2p 2p
1.b)	$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2}$ f crescătoare pe $(-\infty, -3)$ și pe $(1, \infty)$ f descrescătoare pe $(-3, -1)$ și pe $(-1, 1)$	2p 3p
1.c)	Cum din b) rezultă f descrescătoare pe $(-1, 1)$ și crescătoare pe $(1, \infty)$ x=1 e punct de minim, și m=f(1)= 2 minim local rezultă, $f(x) \geq 2$, oricare ar fi $x > -1$	2p 3p
2.a)	$I_0 = \ln \frac{4}{3}$ $I_0 = 1 - 3 \ln \frac{4}{3}$	2p 3p
2.b)	$f_2(x) = \frac{x^2}{x+3}$ $\int_0^1 e^x (x+3) \frac{x^2}{x+3} dx = \int_0^1 e^x x^2 dx = e - 2 \int_0^1 e^x x dx =$ $= e - 2[e - \int_0^1 e^x dx] = e - 2$	1p 2p 2p
2.c)	$I_{n+1} + 3 I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+3} + 3 \frac{x^n}{x+3} dx =$ $\int_0^1 \frac{x^n (x+3)}{x+3} dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$	2p 3p

Propunător:

Profesor: Ftadeev-Brad Floriana Adriana

Colegiul Dobrogean „Spiru Haret” Tulcea